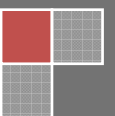


2015

Analyse Maths I

TD N°03 | EG1

Cours Assuré par : _____



Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences Juridiques
Economiques et Sociales – Meknès

Filière Sciences Economiques et Gestion
- Semestre S1 -
Année Universitaire 2015 / 2016



TD N°3 d'Analyse Mathématique
Fonctions à plusieurs variables

Exercice 1 : Dans chaque cas, déterminez et représentez le domaine de définition des fonctions données :

$$1. f(x, y) = \frac{\sqrt{-y+x^2}}{\sqrt{y}} \quad 2. f(x, y) = \frac{\ln(y)}{\sqrt{x-y}} \quad 3. f(x, y) = \ln(x+y)$$

Exercice 2 : Etudier les limites, si elles existent des fonctions suivantes :

$$1. f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad 2. f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2}$$

$$3. f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \quad 4. f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \ln(1+x^2)}{y(x^2+y^2)}$$

Exercice 3 : La fonction f définie par : $f(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

1. $D_f = (\mathbb{R}^*)^2$.
2. $D_f = \mathbb{R}^2$.
3. f n'admet pas de limite finie en $(0,0)$.
4. f est prolongeable par continuité en $(0,0)$.
5. f admet une limite infinie en $(0,0)$.

Exercice 4 : La fonction f définie par : $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

1. f est définie en $(0,0)$.
2. $D_f = \mathbb{R}^2$.
3. f admet une limite finie en $(0,0)$.
4. f n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.
5. f admet une limite infinie en $(0,0)$.

Exercice 5 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Quel est le domaine de définition de f ?
- 2) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
- 3) Calculer les dérivées partielles premières de f en tout point $(x, y) \neq (0,0)$.
- 4) La fonction f admet-elle des dérivées partielles premières en $(0,0)$?

Exercice 6 : Calculer les dérivées partielles à l'ordre 1 et 2 des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = 4x^2y + 2x^3 - 3xy + 2x + 1$
2. $f(x, y) = \ln(x+y) - 2x$
3. $f(u, v, w) = \sqrt{u+v} - 3w^\alpha$ où $\alpha > 0$

Exercice 7 : Soit la fonction de production de Cobb-Douglas $q = F(x, y) = x^{2/3}y^{1/3}$.

1. Calculer les dérivées partielles de F .
2. Calculer les élasticité de la production F par rapport à chacune des quantités x, y .
3. Calculer $F(8, 16)$.
4. La fonction F est-elle homogène ? Que vaut $F(8000, 16000)$?

TD 3

Exercice 1

$$1) f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - y}}{\sqrt{y}}$$

$$\text{Df} = f(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ (} x^2 > y \text{ et } y > 0 \text{)}$$

$$2) f(x, y) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x-y}}$$

$$\text{Df} = f(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0 \text{ et } x > y$$

$$3) f(x, y) = \ln(x+y)$$

$$\text{Df} :$$

Exercice 2

$$1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{on pose } f(x, y) = \frac{x \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{Df} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\text{on a } 2|x \cdot y| \leq x^2 + y^2$$

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Alors } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

$$2) f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{y^2}{(x-1)^2 + y^2}$$

$$\text{on pose } f(x, y) = \frac{y^2}{(x-1)^2 + y^2}$$

$$\text{Df} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$$

$$\text{on a } y^2 \leq (x-y)^2 + y^2$$

$$\frac{|y|^2}{(x-y)^2 + y^2} \leq |y|$$

$$|f(x,y)| \leq |y|$$

$$\text{Alors } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

$$3) f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$\text{on pose } f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$\text{Df} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$$

$$\text{on a } f(x,x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

$$f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0$$

donc

$$\text{dans } \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} f(x,y) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} f(x,y) = 0$$

$\Rightarrow f$ n'admet pas la limite en $(0,0)$

$$4) f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1-x^3)}{x(x^2 + y^2)}$$

$$\text{on pose } f(x,y) = \frac{\ln(1-x^3)}{x(x^2 + y^2)}$$

$$\text{Df } \{J =]-\infty, \infty[\times \mathbb{R}\} \setminus \{0,0\}$$

$$\text{on a } f(x,x) = \frac{\ln(1-x^3)}{2x^3}$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{1}{2} x \left(\ln\left(\frac{1-x^3}{1}\right)^3 \right) = 0$$

$$\ln \frac{1-x^3}{1} \sim -x^3$$

$$f(x, y) = \frac{x \ln(1 - y^3)}{y^2(x^2 + y^2)}$$

$$= \frac{1}{x^2 + y^2} \left(\frac{\ln(1 - y^3)}{y^2} \right)$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y \neq 0}} f(x,y) = 1$$

Alors f n'admet pas de limite en $(0,0)$

Exercice 3

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$$

①

$$\text{Vrai } D_f = (\mathbb{R}^2)^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

②

Faux

③ Faux Faux

$$\text{pour } (x,y) \neq (0,0)$$

$$|f(x,y)| = \left| \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right|$$

$$\leq \frac{|x^3|}{x^2 + y^2} + \frac{|y^3|}{x^2 + y^2}$$

$$\leq |x| + |y|$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

④, donc la fonction g définie par

$$\text{Vrai } g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est un prolongement par continuité de f sur $\mathbb{R}^2$

④ Vrai

⑤ faus

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

Exercice 4

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$$

① faus $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

② faus

$$③ \text{ on } f(x,x) = \frac{x^3}{x^2 - x^2} = \frac{x}{0 - x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} f(x,y) = 0$$

$$f(y^2, y) = \frac{y^6}{y^4 - y^4} = \frac{1}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=y^2}} f(x,y) = \frac{1}{0}$$

majoré

faus f n'a pas de limite en $(0,0)$ ④ Vrai f n'est pas prolongable par continuité en $(0,0)$ ⑤ faus f n'a pas de limite

Exercice 5

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

① $\mathcal{D}f = \mathbb{R}^2$

② on pose $\delta = x^2 + y^2$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{e^\delta - 1}{\delta} = 1$

$\Rightarrow f$ n'est pas continue en $(0,0)$

③ Dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x e^{x^2+y^2} (x^2+y^2) - 2x(e^{x^2+y^2} - 1)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \left(e^{x^2+y^2} - \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2+y^2} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} \left(e^{x^2+y^2} - \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2+y^2} \right)$$

④ On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n,0) - f(0,0)}{n} = \frac{e^{n^2} - 1}{n} = \infty$$

Alors f n'a pas de dérivées partielles en $(0,0)$